

PROSEMINAR ALGEBRA WS 2014

Die mit ^s gekennzeichnete Aufgabe ist schriftlich auszuarbeiten und nächsten Dienstag im Proseminar abzugeben. Aufgaben mit * sind etwas anspruchsvoller.

25 Die Gruppe A_4 der alternierenden Permutationen besitzt keine Untergruppe vom Index 2.

26 Es sei K normal in G und H beliebige Untergruppe von G . Vergleiche HK/K und $H/H \cap K$.

Hinweis: Hier bezeichnet $HK = \{h \cdot k, h \in H, k \in K\} \subset G$. Zeige zuerst, dass HK Untergruppe ist, und dann, dass K in HK sowie $H \cap K$ in H normal sind.

27 (a) Finde endliche Gruppen mit kleinem, bzw. grossem Exponenten relativ zur Gruppenordnung.

(b) Alle Primfaktoren der Gruppenordnung teilen den Exponenten.

(c) Ist p ein Primteiler der Gruppenordnung, so gibt es ein Element, dessen Ordnung von p geteilt wird.

Hinweis: Vergleiche mit dem Lemma der Vorlesung zu den Sylow-Sätzen.

28^s Beweise en detail das Schmetterlingslemma.

29 (a) Vergleiche die Multiplikationstabelle einer Untergruppe F einer endlichen Gruppe G mit der Tabelle einer zu ihr konjugierten Untergruppe sFs^{-1} , für ein $s \in G$.

(b)* Illustriere die Operation einer endlichen Gruppe G durch Konjugation auf der Menge aller ihrer p -Sylow-Untergruppen in einem konkreten, nicht-trivialen Beispiel.

30* Es sei $E \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ die Lösungsmenge der Gleichung $y^2 = x^3 - x$ im \mathbb{R}^2 ergänzt durch einen geeigneten Punkt $e = \infty$ im Unendlichen.

(a) Zeichne diese Kurve im \mathbb{R}^2 und interpretiere den Punkt ∞ geometrisch.

(b) Für zwei Punkte P und Q auf E bezeichne $P * Q$ den dritten Schnittpunkt der Geraden durch P und Q mit E , und $P + Q$ sein Spiegelbild bezüglich der x -Achse. Zeige, dass die Verknüpfung $+$ wohldefiniert ist.

Hinweis: Insbesondere ist der Fall $P = Q$ bzw. $P = \infty$ zu behandeln. Ebenso ist die Existenz des dritten Schnittpunktes der Sekante durch P und Q mit E zu beweisen.

(c) Die Abbildung $(P, Q) \rightarrow P + Q$ definiert eine abelsche Gruppenstruktur auf E .

Bemerkung: Der Beweis der Assoziativität ist aufwendig und nicht durchzuführen. Kurven dieser Art heissen *elliptische Kurven*.